

PAUL GEISLER

ABSTRACT. Über die Herstellung virtueller Landschaften mit Fourier-Reihen

1. FOURIER-REIHE

Für $f(x)$ analytisch, d.h. unendl. oft differenzierbar, gilt:

$$f(x+h) = f(x) + \sum_{i=0}^{\infty} a_i * \sin(i * h) + b_i * \cos(i * h)$$

mit entsprechenden Koeffizienten a_i, b_i geht man vom Ursprung aus, bleibt nur noch

$$f(h) = \sum_{i=0}^{\infty} a_i * \sin(i * h) + b_i * \cos(i * h)$$

Für eine n-dimensionale Funktion sieht das so aus:

$$f(h) = \sum_{i_1=0, i_2=0, \dots, i_n=0}^{\infty, \infty, \dots, \infty} a_{i_1, i_2, \dots, i_n} * \prod_{k=1}^n \sin(i_k * h_k) + b_{i_1, i_2, \dots, i_n} * \prod_{k=1}^n \cos(i_k * h_k)$$

also im \mathbb{R}^2 so:

$$f(x, y) = \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} a_{ij} * \sin(i * x) * \sin(j * y) + b_{ij} * \cos(i * x) * \cos(j * y)$$

mit den Koeff.matritzen $A = (a_{ij})$ und $B = (b_{ij})$.

2. DIE LANDSCHAFT

Sei $f(x, y)$ also die Höhe der Landschaft. Die Koeff. dazu sind dann A, B . Der maximal "darstellbare Detailgrad" entspricht grad der höchsten Frequenz:

$$f_{max} = \min_i (a_{ij} \neq 0 \vee a_{ji} \neq 0) \forall j$$

Ausserdem kann man statt der Frequenzen $F = \{1, 2, 3, \dots\}$ (unter Abstrichen der exakten Approximation) auch z.B. $F = \{2^0, 2^1, 2^2, \dots\}$ benutzen, also die Summe

$$f(x, y) = \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} a_{ij} * \sin(2^i * x) * \sin(2^j * y) + b_{ij} * \cos(2^i * x) * \cos(2^j * y)$$

Damit die Reihe konvergiert, empfiehlt sich für A , (analog für B): $\lim_{i \rightarrow \infty} a_{ij} = 0$ und $\lim_{i \rightarrow \infty} a_{ji} = 0 \forall j$. Besser natürlich Konvergenz sichernde: $a_{ij} = o(1/i, 1/j)$ also eine Positionierung unter der divergenten Harmonischen Reihe $\sum_i 1/i$.

Dank an Wolf Geisler.

3. EIN ALGORITHMUS

gegeben: x, y . gesucht: Höhe $z = f(x, y)$

```
z=0
for i=1 to n
  for j=1 to n
    z+=a[i][j] * sin(2^i*x) * sin (2^j*y)
    z+=b[i][j] * cos(2^i*x) * cos (2^j*y)
  next j
next i
```

wobei n die zu benutzende Frequenz $f_{max}^{2^n}$ angibt, mit A und B sind mindestens $\in \mathbb{R}^n$ sind.